Научни трудове на ВВМУ "Н. Й. Вапцаров", бр. 28/2007 г., ISSN 1312-0867. Варна, ВВМУ "Н. Й. Вапцаров"

БЕЛЕЖКИ ВЪРХУ АСИМПТОТИЧНОТО ПОВЕДЕНИЕ НА ДИФЕРЕНЦИРУЕМИ ФУНКЦИИ: СЪЩЕСТВУВАНЕ НА ПСЕВДОАСИМПТОТИЧНИ ПАРАБОЛИ

Анна В. Томова, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“, Варна

REMARKS ON THE BEHAVIOURS OF SOME FUNCTIONS WITH PSEUDOASYMPTOTIC PARABOLAS

Anna V. Tomova, Naval Academy „N. Y. Vaptsarov“, Varna

Abstract: *We have defined the idea for pseudo asymptotes of differentiable functions. In this paper we restrict the attention over the behaviors of some functions with pseudoasymptotic parabolas. Using the system for computer algebra MATHEMATICA 4.0 we draw the graphics of some functions with pseudoasymptotic parabolas.*
Key words: *Definitions for pseudo asymptotic parabolas for differentiable functions one criterion for existence of pseudo asymptotic parabolas for differentiable functions, formulae and graphics of some functions with pseudo asymptotic parabolas.*

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Нека функцията $f(x),\ x > x_0$ е дефинирана при $x > x_0$. Както е добре известно [1], необходимото и достатъчно условие да съществува асимптота за кривата $y = f(x)$ при $x \to \infty$ е да съществува границата:

(1) $$n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] \quad ,$$

при фиксирано *k*. Известно е също така, че при доказване на необходимостта на условието k се намира по единствен начин:

(2) $$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad .$$

В [2] и [3] сме въвели следната дефиниция:

Дефиниция 1*. Нека функцията f(x) е дефинирана при $x > x_0$. Предполагаме,че втората граница (2) съществува,а първата граница (1) не съществува (в смисъл на крайна стойност).Тогава правата а с уравнение $y(x) = kx$ ще наречем псевдоасимптота за функцията f(x) при $x \to \infty$.*

Забележка 1. Аналогично може да се дефинира псевдоасимптота при $x \to -\infty$.

Забележка 2. Лесно се доказва фактът,че две функции: $f_1(x)$ и $f_2(x) = f_1(x) + ax + b$, които се различават само в линейните си части, имат един и същ характер спрямо своите наклонени асимптоти, т. е. или имат такива,или нямат. Същото се отнася и по отношение на по-горе дефинираните псевдоасимптоти. Не се изключва случаят, когато едната функция има хоризонтална асимптота или псевдоасимптота.

Забележка 3. Примери за функции с псевдоасимптоти са функциите $\ln x$, $\ln(1+x)$ (псевдоасимптотите им са абсцисната ос и др.).

В [3] сме доказали

• ***Критерий (достатъчно условие) за съществуване на псевдоасимптоти и асимптоти на диференцируеми функции****.*

Теорема. *Нека $f: R \to R$ е два пъти непрекъснато диференцируема функция.Тогава*:

1) Ако $f''(x) \geq \dfrac{1}{1+x}$, $x \geq 0$, функцията f(x) няма псевдоасимптоти, а, следователно и асимптоти при при $x \to \infty$;

2) *Ако* $\dfrac{1}{1+x^{1+l}} \geq f''(x) \geq \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \geq 1, 0<l<1$ *f(x) има псевдоасимптота,но няма асимптота*;

3) *Ако* $0 < f''(x) \leq \dfrac{1}{1+x^{2+l}}$, $l > 0$, $x \geq 0$, *f(x) има асимптота при* $x \to \infty$.

Забележка. Аналогично можем да формулираме и да докажем теорема за критерий (достатъчно условие) за съществуване на псевдоасимптоти и асимптоти на диференцируеми функции при $x \to -\infty$;

Предвид съществената роля, която играе този критерий (той разделя диференцируемите функции на 3 класа, а не както е досега - на 2 класа по отношение на поведението им при $x \to -\infty$), тук ще скицираме още един път неговото доказателство.

Доказателство на теоремата:

1) От условието следват неравенствата (след двукратно интегиране):

$$\int_0^x f''(t)dt = f'(x) - f'(0) \geq \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x),\ x > 0,$$

$$\int_0^x \left(f'(t) - f'(0)\right)dt = f(x) - f(0) - f'(0)x \geq \int_0^x \ln(1+t)dt =$$
$$= x\ln(1+x) - x + \ln(1+x), x > 0 \quad .$$

Тогава:

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(0)}{x} + f'(0) + \frac{\ln(1+x)}{x} + \ln(1+x) - 1 \to \infty$$

при $x \to \infty$ и,следователно, *функцията f(x) няма* *асимптоти при* $x \to \infty$.

2) Нека $\dfrac{1}{1+x^{1+l}} \ge f''(x) \ge \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \ge 1$, $0<l<1$. Интегрираме тези неравенства:

$$arctg\, x - \frac{\pi}{4} \le \int_1^x f''(t)dt \le f'(x) - f'(1) \le$$

$$\le \int_1^x \frac{dt}{1+t^{1+l}} < \int_1^x \frac{dt}{t^{1+l}} = \frac{1}{l}\left(1-\frac{1}{x^l}\right),\ x \ge 1.$$

От получените неравенства правим извода,че съществува $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, тъй като $f'(x)$ е монотонно растяща ($f''(x) > 0$) и ограничена. Записваме $f(x)$ с формула на Тейлор от нулев ред:

$f(x) = f(0) + f'(\theta(x)x)x < f(0) + f'(x)x,\ 0 < \theta(x) < 1$,

откъдето имаме: $\dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{f(0)}{x} + f'(x) \le \lim\limits_{\to\infty} f'(x)$.

Разглеждаме производната $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$.

Имаме $f(x) < f(0) + f'(x)x$. Без ограничение на общността, можем да приемем, че $f(0) = 0$. Тогава: $f(x) < f'(x)x$, $f'(x)x - f(x) > 0$, производната на функцията $\dfrac{f(x)}{x}$ е положителна, тя е монотонно растяща и ограничена отгоре, т. е. съществува границата $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, т. е. $f(x)$ *има псевдоасимптота при* $x \to \infty$ [1 ÷ 4]. От друга страна,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f'(\theta(x)x)x}{x} = f'(\theta(x)x) \le k\ ,$$

$$\frac{f(x)}{x} \le \frac{f(0)}{x} + f'(x) \le \lim_{\to\infty} f'(x)\ .$$

С други думи, функцията $\dfrac{f(x)}{x}$ е монотонно растяща като функция на x и монотонно растяща като функция на аргумента $\theta(x)x$, следователно $\lim\limits_{x\to\infty} \theta(x)x = \infty$. От тези неравенства правим още един извод за числото k: $k = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

Сега ще докажем, че функцията няма асимптота. Като вземем предвид ***Забележка 3***, без нарушение на общността ще приемем,че дадената в условието на задачата функция удовлетворява условията:

$$f(0) = f'(0) = 0\ .$$

Тогава, след двукратно интегриране на дясното неравенство получаваме:

$$f(x) > xarctg(x) - \frac{ln(1+x^2)}{2} \quad .\tag{3}$$

Означаваме лявата страна на неравенство (3) като $\phi(x)$ и разглеждаме функцията $g(x) = f(x) - \phi(x)$. Очевидно тя е изпъкнала: $g''(x) > 0$ и следователно удовлетворява неравенството

$$2g(2x) < g(x) + g(3x)\quad ,\tag{4}$$

от което следва:

(5)

$$f(x) + f(3x) - 2f(2x) > xarctg(x) - \frac{ln(1+x^2)}{2} +$$
$$+3xarctg(3x) - \frac{ln(1+9x^2)}{2} - 4xarctg(2x) + ln(1+4x^2).$$

Преобразуваме лявата част на (5),като допускаме,че $f(x)$ има наклонена асимптота $ax+b$ при $x \to \infty$:

$$f(x) + f(3x) - 2f(2x) = f(x) - ax - b +$$
$$+f(3x) - a3x - b - 2f(2x) + 2a2x + 2b\ .$$

Тогава границата на лявата част на (5) при $x \to \infty$ ще бъде равна на 0. Намираме границата на дясната част на (5):

$$\lim_{x\to\infty}\left[xarctg(x) - \frac{ln(1+x^2)}{2} + 3xarctg(3x) - \frac{ln(1+9x^2)}{2} - \right.$$
$$\left. -4xarctg(2x) + ln(1+4x^2)\right] = \ge ln\frac{4}{3}\quad .$$

Стигнахме до очевидно невъзможното неравенство: $0 \ge ln\dfrac{4}{3}$, което доказва,че $f(x)$ *няма асимптоти при* $x \to \infty$. Аналогично се доказва,че $f(x)$ *няма асимптоти* и при $x \to -\infty$. С това доказателството е завършено.

3) Нека $0 < f''(x) \le \dfrac{1}{1+x^{2+l}}$, $l > 0$, $x \ge 1$. Интегрираме тези неравенства два пъти и получаваме при $x \ge 1$:

(6)

$$0 \le f'(x) - f'(1) \le \int_1^x \frac{dt}{1+t^{2+l}} \le \int_1^x \frac{dt}{t^{2+l}} = \frac{1}{l+1}\left(1-\frac{1}{x^{1+l}}\right),$$

$$0 \le f(x) - f(1) - f'(1)x + f'(1) \le \int_1^x \frac{1}{l+1}\left(1 - \frac{1}{t^{1+l}}\right)dt =$$

$$= \frac{x-1}{l+1} + \frac{1}{l(l+1)}\left(1 - \frac{1}{x^l}\right) \quad .$$

Тогава, от посоченото по-горе доказателство в ***случай 2)*** следва,че функцията има псевдоасимптота,т.е. съществува $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$. Остава да докажем, че съществува границата

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

Функцията $f(x) - kx$ е монотонно намаляваща: $\left(f(x) - kx\right)' = f'(x) - k \le 0$. Следователно, трябва да докажем, че тя е ограничена отдолу. Имаме следните съотношения:

$$f(x) - kx = \frac{\frac{xf'(\theta(x)x)}{x} - k}{\frac{1}{x}} = \frac{f'(\theta(x)x) - k}{\frac{1}{x}} \underset{x\to\infty}{\to} \left[\frac{0}{0}\right] .$$

Последната неопределеност е близка по стойност до неопределеността $\frac{f'(x) - k}{\frac{1}{x}} \underset{x\to\infty}{\to} \left[\frac{0}{0}\right]$, тъй като

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} f'(\theta(x)x) = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$. Имаме: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x) - k}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{-\frac{1}{x^2}}$. От условията на разглеждания случай следва, че

$$\left|\frac{f''(x)}{-\frac{1}{x^2}}\right| = \left|\frac{f''(x)}{\frac{1}{x^2}}\right| \le \frac{x^2}{\left(1 + x^{2+l}\right)} \underset{x\to\infty}{\to} 0 .$$

Следователно, $f(x) - kx$ е ограничена и границата $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$ съществува. С това доказателството е завършено.

2. ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

Дефиниция 2 (Дефиниция за псевдоасимптотични параболи): *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана при $x > x_0$. Предполагаме,че границата*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^m}, \quad m > 1$$

съществува. Тогава параболата с уравнение $y(x) = kx^m$ ще наречем псевдоасимптотична парабола за функцията f(x) при $x \to \infty$.

Забележка 4. Аналогично може да се дефинират псевдоасимптотични параболи при $x \to -\infty$.

Забележка 5. Лесно се доказва фактът,че две функции: $f_1(x)$ и $f_2(x) = f_1(x) + P_{m-1}(x)$, които се различават само с полином от $m-1$ степен, имат един и същ характер спрямо своите псевдоасимптотични параболи, т.е.или имат такива, или нямат.

Забележка 6. Примери за функции с псевдоасимптоти, разглеждани като параболи от първи ред, са функциите *lnx*, $ln(1+x)$ (псевдоасимптотите или псевдоасимптотичните им параболи от първи ред са абсцисната оси др.) .

• ***Критерий (достатъчно условие) за съществуване на псевдоасимптотични параболи на диференцируеми функции***.

Теорема. *Нека $f: R \to R$ е $m+1$ - пъти непрекъснато диференцируема функция.Тогава:*

1) Ако

$$f^{(m+1)}(x) \ge \frac{x^{m-1}}{(1+x)^m},\ m > 1,\ x \ge 0,\ \textit{функцията}\ f(x)$$

няма псевдоасимтотични параболи при $x \to \infty$;

2) Ако

$$0 < f^{(m+1)}(x) \le \frac{x^{m-1}}{\left(1 + x^{1+l}\right)^m},\ x \ge 1,\ 0 < l < 1,\ \textit{функцията}$$

f(x) има псевдоасимптотична парабола при $x \to \infty$.

Забележка. Аналогично можем да формулираме и да докажем теорема за критерий (достатъчно условие) за съществуване на псевдоасимптотични параболи за диференцируеми функции при $x \to -\infty$;

Доказателство:

1) Интегрираме неравенството

$$f^{(m+1)}(x) \ge \frac{x^{m-1}}{(1+x)^m},\ m > 1,\ x \ge 0$$

и получаваме:

$$\int_0^x f^{(m+1)}(t)dt = f^{(m)}(x) - f^{(m)}(0) \ge \int_0^x \frac{t^{m-1}}{(1+t)^m}dt = \frac{1}{m}\int_0^x \frac{1}{(1+t)^m}dt^m =$$

$$\frac{1}{m}\frac{x^m}{(1+x)^m} + \int_0^x \frac{t^m}{(1+t)^{m+1}}dt = \frac{1}{m}\frac{x^m}{(1+x)^m} + \frac{1}{(m+1)}.\frac{x^{m+1}}{(1+x)^{m+1}} +$$

$$+\int_0^x \frac{t^{m+1}}{(1+t)^{m+2}}dt = \frac{1}{m}\frac{x^m}{(1+x)^m} + \frac{1}{(m+1)}.\frac{x^{m+1}}{(1+x)^{m+1}} + \frac{1}{(m+2)}.\frac{x^{m+2}}{(1+x)^{m+2}} +$$

$$+\frac{1}{(m+3)}.\frac{x^{m+3}}{(1+x)^{m+3}} + \frac{1}{(m+4)}.\frac{x^{m+4}}{(1+x)^{m+4}} + \frac{1}{(m+5)}.\frac{x^{m+5}}{(1+x)^{m+5}} + \ldots$$

$$+\int_0^x \frac{t^{m+k}}{(1+t)^{m+k+1}}dt, m > 1, x \ge 0 \quad .$$

Оттук правим извода, че не съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(m)}(x)$, като правим връзка с хармоничния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, който, както добре знаем, е разходящ. Записваме $f(x)$ с формула на Тейлор от m-ред в околността на 0:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m+$$
$$+\frac{f^{(m+1)}(\theta(x)x)}{(m+1)!}x^{m+1},\ 0<\theta(x)<1$$

Производната от m-ред е растяща функция, тъй като нейната първа производна ($m+1$ - производна на функцията) е положителна. Имаме

$$\frac{f^{(m+1)}(\theta(x)x)}{(m+1)!}x^{m+1}\geq\frac{\theta^{m-1}(x)x^{m-1}}{(1+\theta(x)x)^m(m+1)!}x^{m+1}\geq$$
$$\geq\frac{\theta^{m-1}(x)}{(1+x)^m(m+1)!}x^{2m}\quad .$$

От неравенствата в началото на разглеждания случай, изчислени при променлива вместо x - $\theta(x)x$, следва, че редицата $\theta(x)x$ при $x\to\infty$ е неограничена, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)x=\infty$. Тогава от горните неравенства получаваме, че границата $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m},\quad m>1$ не съществува.

2) Интегрираме неравенството:

$$0<f^{(m+1)}(x)\leq\frac{x^{m-1}}{\left(1+x^{1+l}\right)^m},\ x\geq 1,\ 0<l<1\quad .$$

$$0<\int_1^x f^{(m+1)}(t)dt\leq f^{(m)}(x)-f^{(m)}(1)\leq\int_1^x\frac{t^{m-1}dt}{\left(1+t^{1+l}\right)^m}<$$
$$<\int_1^x\frac{t^{m-1}dt}{t^{(1+l)m}}=\int_1^x t^{m-1-m-lm}dt=\frac{1}{lm}\left(1-\frac{1}{x^{lm}}\right),\ x\geq 1\ .$$

Следователно, съществува $\lim\limits_{x\to\infty}f^{(m)}(x)$, тъй като $f^{(m)}(x)$ е монотонно растяща ($f^{(m+1)}(x)$ е положителна), а от горните неравенства следва, че тя е ограничена при $x\to\infty$.

Записваме $f(x)$ с формула на Тейлор от m - ред в околността на 0:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}x^{m-1}+$$
$$+\frac{f^{(m)}(\theta(x)x)}{m!}x^m,\ 0<\theta(x)<1\ .$$

От този запис и от лявото неравенство следва, че функцията наистина има псевдоасимптотична парабола, тъй като съществува границата: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=k$.

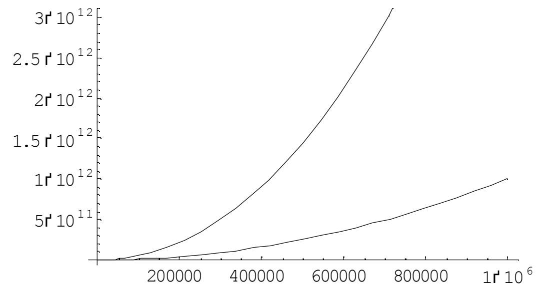
Тази граница очевидно е:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\0<\theta(x)<1}}\frac{f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}x^{m-1}+\frac{f^{(m)}(\theta(x)x)}{m!}x^m}{x^m}$$

3. ГРАФИКИ НА ФУНКЦИИ БЕЗ И С ПСЕВДОАСИМПТОТИЧНИ ПАРАБОЛИ

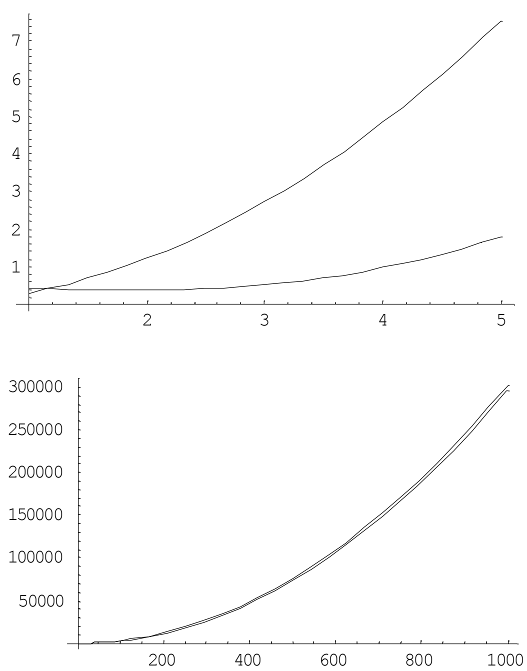
Пример 3.1. Нека: $f'''(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$, т. е. $m=2$, според критерия функцията няма псевдоасимптотична парабола. На фиг. 1.1 е показана графиката ѝ, заедно с графиката на параболата $y=x^2$.



Фиг. 1.1

Пример 3.2. Нека: $f'''(x)=\frac{x}{\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)^2}$, т. е. отново $m=2$. Намираме с помощта на системата за компютърна алгебра MATHEMATICA 4. 0. :

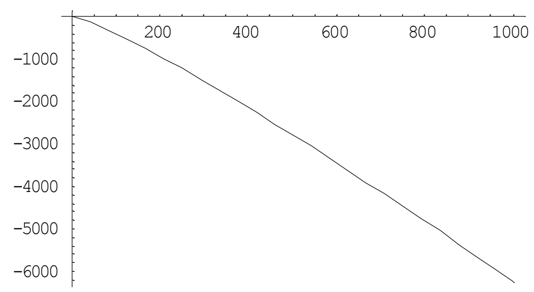
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. На фиг. 1.2 са показани графиките на функцията и на нейната псевдоасимптотична парабола в различни по дължина интервали за изменение на x.



Фиг. 1.2

На фиг. 1.3 е показана графиката на разликата

$$f(x)-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}x^2$$



Фиг. 1.3

4. ПЛАН ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ПРАКТИЧЕСКО ЗАНЯТИЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ НА ТЕМА "ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПОВЕДЕНИЕТО И ПОСТРОЯВАНЕ НА ГРАФИКИ НА ФУНКЦИИ С ПСЕВДОАСИМПТОТИЧНИ ПАРАБОЛИ С ПОМОЩТА НА СИСТЕМА ЗА КОМПЮТЪРНА АЛГЕБРА"

4.1. Теоретична част: обучаемите предварително са присъствували на лекция и са се запознали със съдържанието на темата и доказателството на критерия за отсъствие и съществуване на пседоасимптотични асимптоти. Преподавателят обръща внимание на основните идеи и посочва съществуването на твърде широк клас елементарни и специални функции с псевдоасимптотични параболи. Подчертава се сложността на пресмятанията и практическата полза за намирането на формулите с помощта на системи за компютърна алгебра, а също така и възможността с тези системи да се начертаят графиките на получените функции и да се проследи поведението им спрямо техните псевдоасимптотични параболи.

4.2. Предлага се на обучаемите сами да намерят формули за функции без и с псевдоасимптотични параболи.

4.3. Обучаемите построяват графики за получените функции в т. 3.2.

4.4. Правят се сравнения между графиките на функциите и се обясняват разликите в поведението им спрямо техните псевдоасимптотични параболи.

4.5. Ако се разполага с няколко системи за компютърна алгебра, правят се сравнения между резултатите, получени с тях при едни и същи задания.

4.5. Изводи: разсъждава се върху възможността за допущане на грешки и неточности при работа със системи за компютърна алгебра, констатирането и отстраняването им . Изтъкват се предимствата на работа със системи за компютърна алгебра за получаване и илюстриране на сериозни математически резултати.

5. ИЗВОДИ

Сравняваме поведението на двете функции, разгледани в примери 3.1. и 3.2. Както и очаквахме, едва при значителни стойности на аргумента графиката на функцията с псевдоасимтотича парабола и тази на нейната псевдоасимтотича парабола са почти неразличими. Разликата обаче между стойностите им е неограничена, когато аргументът расте неограничено.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Т о м о в а, А. Бележки върху поведението на някои функции с псевдоасимптоти. Математически форум, брой 2, март - април, 2003 г., ISSN 1311-297, Том 5, стр. 55- 57.

2. Т о м о в а, А. Един критерий за съществуване на псевдоасимптоти и асимптоти на диференцируеми функции. Бележки върху поведението на някои класове функции с псевдоасимптоти и асимптоти (под печат).

3. Т о м о в а, А. В., М. П. Николова. УЧЕБЕН САЙТ НА ТЕМА "ИЗСЛЕДВАНЕ ПОВЕДЕНИЕТО НА ФУНКЦИИ С ПСЕВДОАСИМПТОТИ И АСИМПТОТИ" с адрес в Интернет: http://free.bol.bg/annalidia

4. Ф и х т е н г о л ь ц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва, 1975.

З А К О Н Т А К Т И:

1. А. В. Томова: e-mail: anna_bg_2000@yahoo.com.